

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{2a-b}{4a^2+2ab} - \frac{2a}{b^2+2ab}\right) : \left(\frac{b^2}{8a^3-2ab^2} + \frac{1}{2a+b}\right)$$

и найдите его значение при $a = 38; b = 57$.

- A) $-\frac{3}{19}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{13}{19}$ E) нет правильного ответа

2. Найдите натуральное число, заданное выражением

$$\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{4-1}}$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) нет правильного ответа

3. Найдите значение выражения

$$\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{4}} + \frac{2}{\sqrt{4} + \sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6} + \sqrt{8}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{98} + \sqrt{100}} + \sqrt{2}$$

- A) 1 B) 8 C) 10 D) $10\sqrt{2}$ E) нет правильного ответа

4. Решите уравнение

$$(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$$

В ответе укажите сумму всех найденных решений.

- A) 4 B) -4 C) 2 D) -2 E) нет правильного ответа

5. Найдите множество решений неравенства

$$\frac{(x+4)(-x^2-4x+5)}{(x-1)^3(x-2)^2} \leq 0$$

- A) $(-\infty; -5] \cup [-4; +\infty)$ B) $(-\infty; -5] \cup [-4; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$ C) $(-5; -4)$
 D) $(-\infty; -5) \cup (-4; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$ E) нет правильного ответа

6. Решите неравенство

$$\frac{x-2}{x\sqrt{10+3x-x^2}} > 0$$

В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в решение этого неравенства.

- A) -1 B) 6 C) 7 D) 11 E) нет правильного ответа

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = -8 - 3x - 3y \\ x + y - 24 = 4xy \end{cases}$$

В ответе укажите сумму координат всех решений. Например, если (1; 2) и (3; 4) — решения системы, то в ответе нужно указать $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

- A) 12 B) 16 C) 24 D) 28 E) нет правильного ответа

8. Область задана на плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 16 \\ y^2 \leq 16 \\ y \leq -|x| \end{cases}$$

Найдите её площадь.

- A) $32 - 8\pi$ B) $24 - 4\pi$ C) $24 - 2\pi$ D) $16 - 4\pi$ E) нет правильного ответа

9. Найдите область определения функции

$$y = \log_4 \left(\frac{-x^2 + 7x - 12}{-\sqrt{5-x}} \right)$$

- A) (3; 4) B) $(-\infty; 3]$ C) $(-\infty; 3) \cup (4; 5)$
 D) $(-\infty; 3) \cup (3; 4)$ E) нет правильного ответа

10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sin^2(x) + \cos(x) - \frac{1}{2}$.

- A) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ и $-\frac{3}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{2}$ E) нет правильного ответа

11. Найдите $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$.

- A) $\frac{24}{25}$ B) $\frac{7}{25}$ C) $-\frac{7}{25}$ D) $-\frac{24}{25}$ E) нет правильного ответа

12. Прямая l задана на плоскости уравнением $2y - 3x - 10 = 0$. Укажите уравнение прямой, перпендикулярной прямой l и проходящей через точку $A(-3; 4)$.

- A) $3y - 2x - 10 = 0$ B) $3y + 2x - 6 = 0$ C) $-\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}x + 3 = 0$
 D) $-\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = 0$ E) нет правильного ответа

13. График функции $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ сдвинули на 3 единицы вправо и на 2 единицы вверх, получив при этом график функции $g(x)$. Какой вид может иметь $g(x)$?

- A) $2x^2 - 8x + 13$ B) $2x^2 + 16x + 37$ C) $2x^2 - 8x + 9$
 D) $2x^2 + 16x + 33$ E) нет правильного ответа

14. b_n — геометрическая прогрессия. Найдите значение b_3 , если $b_5 - b_3 = 288$ и $b_4 - b_2 = 96$.

- A) 18 B) 24 C) 36 D) 48 E) нет правильного ответа

15. Укажите вариант ответа, в котором перечислены все верные утверждения:

- (a) Центр описанной окружности любого треугольника — точка, равноудалённая от сторон этого треугольника;
 (b) В любом ромбе диагонали равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам;
 (c) Для любого треугольника верно, что напротив большего угла лежит большая сторона.

- A) a B) a, b C) b, c D) c E) нет правильного ответа

16. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD \parallel BC$ диагонали пересекаются в точке O . Известны площади $S(\triangle ADO) = 12$ и $S(\triangle BCO) = 3$. Найдите площадь трапеции.
 А) 18 В) 24 С) 27 D) 75 E) нет правильного ответа
17. Из точки C провели прямую, касающуюся окружности в точке A . Через точку A провели диаметр окружности AB . Отрезок BC пересекает окружность в точке K . Известно, что $KC = 9$; $AC = 15$. Найдите радиус окружности.
 А) 10 В) 20 С) $10\sqrt{2}$ D) 12,5 E) нет правильного ответа
18. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота BH и медиана AM . Известно, что $\angle MCA$ в два раза больше $\angle MAC$, $BC = 10$. Найдите AH .
 А) 2,5 В) 3 С) 4 D) 10 E) нет правильного ответа
19. Найдите остаток от деления $2^{1000000}$ на 15.
 А) 1 В) 5 С) 11 D) 14 E) нет правильного ответа
20. При каких значениях параметра a ровно один из двух различных корней уравнения $x^2 + 4x + a = 0$ принадлежит интервалу $(-3, 0)$?
 А) $[0; 3]$ В) $[-3; 0]$ С) $(0; 3]$ D) $(-3; 0)$ E) нет правильного ответа
21. Функция $f(x)$ определена для $x \geq 0$, причем для любых положительных a и b верно, что $f(ab) = f(a) + f(b)$. Найдите $f(\frac{1}{1968})$, если $f(1968) = -1$.
 А) -1 В) $\frac{1}{1968}$ С) 1968 D) 1 E) нет правильного ответа
22. Решите уравнение $|x^2 - |7 - x^2|| = 3$
 А) нет решений В) $\{\sqrt{2}; \sqrt{5}\}$ С) $\{\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{5}\}$
 D) $\{\pm\sqrt{5}\}$ E) нет правильного ответа
23. Братья Игорь и Костя привезли в чемоданах сладости на Выездную школу ЭМШ. Когда школа закончилась, оказалось, что общий вес чемоданов братьев за время школы уменьшился на 18%. При этом вес чемодана Игоря уменьшился на 15%, а вес чемодана Кости — на 20%. Известно также, что в конце Выездной школы чемодан Кости весил на 4 кг больше, чем чемодан Игоря в начале школы. Определите первоначальный вес чемоданов Игоря и Кости. В ответе укажите их сумму.
 А) 50 кг В) 60 кг С) 70 кг D) 80 кг E) нет правильного ответа
24. Александр втрое старше Николая. Сумма их возрастов — 80 лет. Через сколько лет Александр будет вдвое старше Николая?
 А) 15 В) 20 С) 25 D) 30 E) нет правильного ответа
25. Катя ехала от экономического факультета до пансионата «Чудное», а Влад — наоборот. Они встретились, когда Катя проехала 35 км и еще половину оставшегося ей до пансионата пути, а Влад проехал 15 км и четверть оставшегося ему до экономического факультета пути. Какое расстояние между экономическим факультетом и пансионатом «Чудное»?
 А) 80 км В) 90 км С) 100 км D) 110 км E) нет правильного ответа
26. Каждому из двух преподавателей нужно напечатать одинаковое количество раздаток. Они получили это задание одновременно, но второй сначала потратил больше 2 часов, чтобы найти хороший принтер, и с его помощью закончил работу на 3 часа раньше первого. Первый приступил к печати сразу же и выполнил работу за 8 часов. Известно, что второй преподаватель через 1 час после начала работы хорошего принтера напечатал столько же раздаток, сколько к этому времени первый. Во сколько раз хороший принтер увеличивает производительность труда?
 А) 2 В) 3 С) 4 D) 5 E) нет правильного ответа
27. На отборочную контрольную пришло 25 школьников. Известно, что 1) каждый школьник, который взял ручку, взял и блокнот; 2) без ручки пришло 12 школьников; 3) без блокнота пришло 5 школьников. На сколько меньше школьников, которые пришли с блокнотом, но без ручки, чем тех, кто взял ручку?
 А) 5 В) 6 С) 7 D) 8 E) нет правильного ответа
28. Преподаватели курса в ЭМШ решили устроить чаепитие и принесли на него конфеты, вафли и пирожные. Среди 35 слушателей курса не любят есть конфеты 13, вафли — 12, а пирожные — 9 школьников. Кроме того, не любят есть конфеты и вафли 3, вафли и пирожные — 6, конфеты и пирожные — 5 школьников. Наконец, не любят есть конфеты, вафли и пирожные 2 школьника. Сколько на курсе слушателей, которые любят есть и конфеты, и вафли, и пирожные?
 А) 10 В) 11 С) 12 D) 13 E) нет правильного ответа
29. Кате очень понравилась лекция про чётность и нечётность на одном из курсов в ЭМШ. После пары она записала на доске несколько последовательных натуральных чисел и подсчитала количество четных и нечетных. Оказалось, что 52% чисел на доске — нечетные. Сколько всего четных чисел записано на доске?
 А) 12 В) 13 С) 14 D) 15 E) нет правильного ответа
30. Однажды на один из математических курсов ЭМШ, который ведут Егор и Юлия, зашёл их друг Игорь. Все трое вышли из аудитории и вместе прошли до столовой, при этом каждый сделал целое число шагов. Длина шага Юли — 75 см, Игоря — 95 см, Егора — 100 см. Какое расстояние от аудитории до столовой, если известно, что оно наименьшее из возможных?
 А) 19 м В) 27 м С) 54 м D) 57 м E) нет правильного ответа